Théorie des langages : THL

CM 2

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S5 2023

Aperçu

Programme du cours

1. Langages rationnels
2. Automates finis
3. Langages algébriques, grammaires hors-contexte
4. Automates à pile
5. Parsage LL
6. Parsage LR
7. `flex` & `bison`

Prochainement

Une simple grammaire :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var} &::= \texttt{[a-zA-Z]}\,\texttt{[a-zA-Z0-9\_]*} \\
\mathsf{Num} &::= \texttt{-?}\,\texttt{[1-9]}\,\texttt{[0-9]*} \\
\mathsf{Aexp} &::= \mathsf{Num} \mid \mathsf{Var} \mid \mathsf{Aexp} + \mathsf{Aexp} \mid \mathsf{Aexp} - \mathsf{Aexp} \mid \mathsf{Aexp} * \mathsf{Aexp} \\
\mathsf{Bexp} &::= \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{Aexp} == \mathsf{Aexp} \mid \mathsf{Aexp} < \mathsf{Aexp} \\
&\quad\mid \neg \mathsf{Bexp} \mid \mathsf{Bexp} \wedge \mathsf{Bexp} \mid \mathsf{Bexp} \vee \mathsf{Bexp} \\
\mathsf{Stmt} &::= \mathsf{Var} = \mathsf{Aexp} \mid \mathsf{Stmt}\ ;\ \mathsf{Stmt} \mid \texttt{while}\ \mathsf{Bexp}\ \mathsf{Stmt} \\
&\quad\mid \texttt{if}\ \mathsf{Bexp}\ \texttt{then}\ \mathsf{Stmt}\ \texttt{else}\ \mathsf{Stmt}
\end{aligned}
$$

Dernièrement : mots

Soit Σ un ensemble fini.

- on appelle les éléments $a, b, \dots \in \Sigma$ des symboles

On dénote Σ^* l'ensemble de tous les suites finies d'éléments de Σ.

- donc $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots = \bigcup_{n \ge 0} \Sigma^n$
- on appelle les éléments $u, v, w, \dots \in \Sigma^*$ des mots

La concaténation de deux mots $a_1 \dots a_n$ et $b_1 \dots b_m$ est le mot $a_1 \dots a_n\, b_1 \dots b_m$.

- ε : le mot vide
- l'opération « . » sur mots est associative et a ε comme élément neutre de deux côtés

La longueur $|u|$ d'un mot $u \in \Sigma^*$: le nombre de symboles de u.

- $|\varepsilon| = 0$ et $|uv| = |u| + |v|$
- u^n : la concaténation de n copies de u
- $|u^n| = n\,|u|$

Dernièrement : langages

Un langage est un sous-ensemble $L \subseteq \Sigma^*$.

- opérations ensemblistes : $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\overline{L}$
- concaténation : $L_1 L_2 = \{u_1 u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$
- $L^n = L \cdots L$ (n copies de L)
- étoile de Kleene : $L^* = L^0 \cup L_1 \cup L^2 \cup \cdots = \bigcup_{n \geq 0} L^n$

L'opération « . » sur langages est associative et a $\{\varepsilon\}$ comme élément neutre de deux côtés.

- $L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

Dernièrement : langages rationnels

Les expressions rationnelles sur Σ :

1. $\varnothing$ et ε sont des expressions rationnelles
2. pour tout $a \in \Sigma$, a est une expression rationnelle
3. e_1 et e_2 expressions rationnelles $\Rightarrow$ $e_1 + e_2$, $e_1.e_2$ et e_1^* aussi

Le langage dénoté par une expression rationnelle e sur Σ :

1. $L(\varnothing) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
2. $L(a) = \{a\}$ pour tout $a \in \Sigma$
3. $L(e_1 + e_2) = L(e_1) \cup L(e_2)$, $L(e_1.e_2) = L(e_1).L(e_2)$, $L(e^*) = (L(e))^*$

Les langages rationnels sur Σ :

1. $\emptyset$ et $\{\varepsilon\}$ sont des langages rationnels
2. pour tout $a \in \Sigma$, $\{a\}$ est un langage rationnel
3. L_1 et L_2 langages rationnels $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$ et L_1^* aussi

Théorème : $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il existe une expression rationnelle e telle que $L = L(e)$.

Dans le poly

La dernière fois :

- chapitre 2, moins 2.3.2-5 et 2.4.4
- chapitre 3, moins 3.1.3
- plus démonstration que L rationnel $\Rightarrow$ $\mathrm{Pref}(L)$ rationnel

Aujourd'hui :

- chapitre 4, moins 4.1.3, 4.2.1, 4.3, 4.4

Correction (partielle)

Sur alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -, ., \mathsf{E}\}$, donnez des expressions rationnelles pour les langages suivants :

1. les entiers positifs en base 10
   $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)^*$
   `[1-9][0-9]*`
2. les entiers relatifs en base 10
   `-?[1-9][0-9]*`
3. les nombres décimaux positifs en base 10
   `[0-9]*.[0-9]*`
4. les nombres décimaux relatifs en base 10
   `-?[0-9]*.[0-9]*`
5. les nombres décimaux relatifs en base 10 en notation scientifique.
   `-?[0-9]*.[0-9]*E[0-9]*`

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cup L_2$ est rationnel
2. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ est rationnel
3. Chaque sous-ensemble d'un langage rationnel L est rationnel.

Pour chaque expression rationnelle suivante, trouvez deux mots qui appartiennent de leur langage et deux autres qui ne l'appartiennent pas :

4. $a^* b^*$
5. $a^* + b^*$
6. $(aaa)^*$
7. $(a+b)^* ab (a+b)^* ba (a+b)^*$

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cup L_2$ est rationnel ✓
2. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ est rationnel ✓
3. Chaque sous-ensemble d'un langage rationnel L est rationnel. ✗

Pour chaque expression rationnelle suivante, trouvez deux mots qui appartiennent de leur langage et deux autres qui ne l'appartiennent pas :

4. $a^* b^*$
5. $a^* + b^*$
6. $(aaa)^*$
7. $(a+b)^* ab\, (a+b)^* ba\, (a+b)^*$

Automates finis déterministes

Exemple

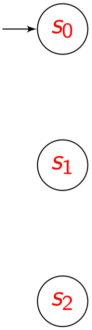
L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* : $L = \{ab, aba, abb, abaa, abab, abba, \dots\}$
(en Python-èsque) :

```
def startsab(stream):
    state = 0
    while x = next(stream):
        if state == 0:
            if x == "a":
                state = 1
            else: return False
        elif state == 1:
            if x == "b":
                state = 2
            else: return False
    if state == 2: return True
    else: return False
```

Exemple

L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* : $L = \{ab, aba, abb, abaa, abab, abba, \dots\}$
(en Python-èsque) :

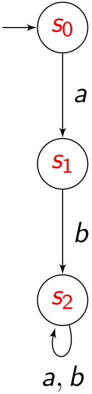
```
def startsab(stream):
    state = 0
    while x = next(stream):
        if state == 0:
            if x == "a":
                state = 1
            else: return False
        elif state == 1:
            if x == "b":
                state = 2
            else: return False
    if state == 2: return True
    else: return False
```



Exemple

L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* : $L = \{ab, aba, abb, abaa, abab, abba, \dots\}$
(en Python-èsque) :

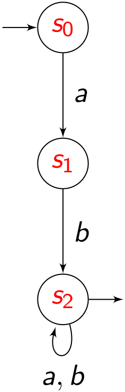
```
def startsab(stream):
    state = 0
    while x = next(stream):
        if state == 0:
            if x == "a":
                state = 1
            else: return False
        elif state == 1:
            if x == "b":
                state = 2
            else: return False
    if state == 2: return True
    else: return False
```



Exemple

L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* : $L = \{ab, aba, abb, abaa, abab, abba, \dots\}$
(en Python-èsque) :

```
def startsab(stream):
    state = 0
    while x = next(stream):
        if state == 0:
            if x == "a":
                state = 1
            else: return False
        elif state == 1:
            if x == "b":
                state = 2
            else: return False
    if state == 2: return True
    else: return False
```



Automates finis déterministes complets

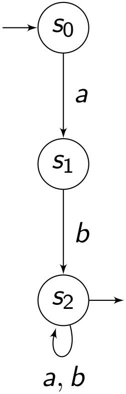
Définition (4.1)

Un automate fini déterministe complet est une structure $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ où

- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $q_0 \in Q$ est l'état initial,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition.

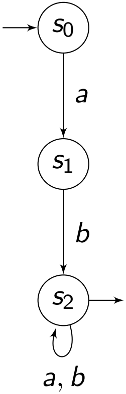
- un graphe orienté avec arcs étiquetés dans Σ et certains nœuds distingués comme initial et/ou final

Exemple



$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$Q = \{s_0, s_1, s_2 \quad\}$$
$$q_0 = s_0$$
$$F = \{s_2\}$$

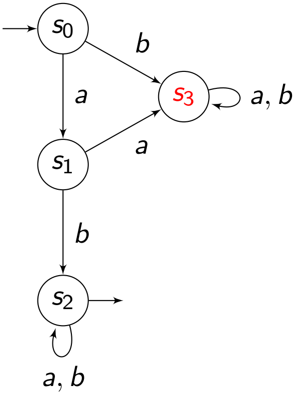
Exemple



$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \{a, b\} \\
Q &= \{s_0, s_1, s_2 \quad\} \\
q_0 &= s_0 \\
F &= \{s_2\}
\end{aligned}
$$

$$
\delta : \quad
\begin{array}{c|cc}
 & a & b \\
\hline
s_0 & s_1 & \\
s_1 & & s_2 \\
s_2 & s_2 & s_2
\end{array}
$$

Exemple



$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$Q = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$$
$$q_0 = s_0$$
$$F = \{s_2\}$$

δ :

	a	b
s_0	s_1	s_3
s_1	s_3	s_2
s_2	s_2	s_2
s_3	s_3	s_3

Comment ça marche

Un automate fini déterministe complet : $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

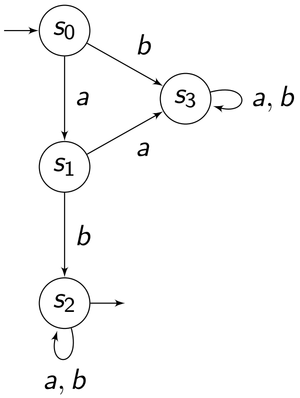
- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: la fonction de transition

On note $q \xrightarrow{a} r$ pour $\delta(q, a) = r$.

Définition

- Un calcul dans A est une séquence $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$.
  - donc $\delta(q_i, a_i) = q_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$
- L'étiquette d'un calcul comme ci-dessus est
  $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$.
- Un calcul comme ci-dessus est réussi si $q_1 = q_0$ et $q_n \in F$.
- Le langage reconnu par A est
  $L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$.

Exemple



calculs dans A :

- $s_0 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_n} s_3$
- $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_n} s_3$
- $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_n} s_2$

pour touts $x_1, \dots, x_n \in \{a, b\}$

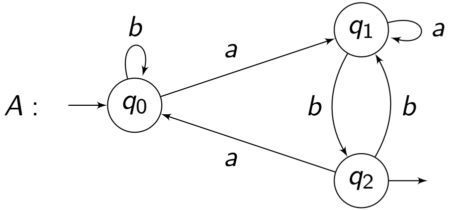
calculs réussis :

- $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_n} s_2$

langage reconnu par A :

- $L(A) = L(ab(a+b)^*)$

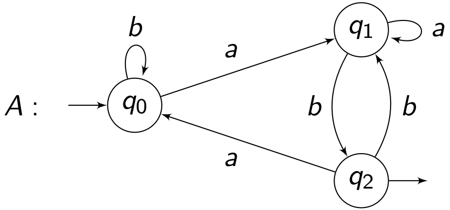
5 minutes de réflexion



Vrai ou faux ?

1. $baba \in L(A)$
2. $baab \in L(A)$
3. $abab \in L(A)$
4. $abaaab \in L(A)$
5. $\varepsilon \in L(A)$
6. $L(b^* aa^* b) \subseteq L(A)$

5 minutes de réflexion



Vrai ou faux ?

1. $baba \in L(A)$ ✗
2. $baab \in L(A)$ ✓
3. $abab \in L(A)$ ✗
4. $abaaab \in L(A)$ ✓
5. $\varepsilon \in L(A)$ ✗
6. $L(b^* aa^* b) \subseteq L(A)$ ✓

« Déterministe complet » ?

Automate fini déterministe complet : $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: la fonction de transition
- très utile dans la théorie

Automate fini déterministe :

- δ fonction partielle
- très utile pour l'implémentation

Automate fini non-déterministe :

- δ relation
- très utile dans la théorie

Automate fini non-déterministe avec transitions spontanées :

- notion encore plus générale et utile (en théorie)

Automates finis déterministes

Définition (4.4)

Un automate fini déterministe est une structure $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ où

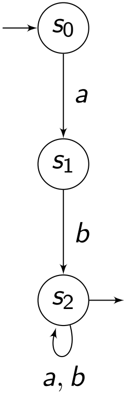
- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $q_0 \in Q$ est l'état initial,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta : Q \times \Sigma \rightharpoonup Q$ est la fonction partielle de transition.

- tout automate fini déterministe peut être complété en ajoutant un état puits :

Exemple

Automate fini déterministe et complétion :

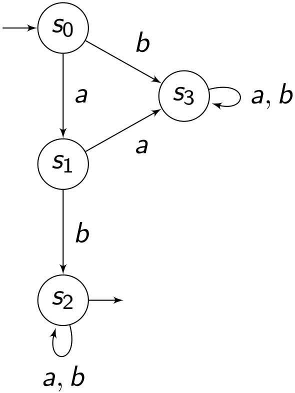
```
def startsab(stream):
    state = 0
    while x = next(stream):
        if state == 0:
            if x == "a":
                state = 1
            else: return False
        elif state == 1:
            if x == "b":
                state = 2
            else: return False
    if state == 2: return True
    else: return False
```



Exemple

Automate fini déterministe et complétion :

```
def startsab(stream):
    state = 0
    while x = next(stream):
        if state == 0:
            if x == "a":
                state = 1
            else: return False
        elif state == 1:
            if x == "b":
                state = 2
            else: return False
    if state == 2: return True
    else: return False
```



Complétion

Lemme

Pour tout automate fini déterministe A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.
2. On construit $A' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ comme suit :
3. $Q' = Q \cup \{q_p\}$ où $q_p \notin Q$,
4. $q_0' = q_0$ et $F' = F$.
5. La fonction $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ est définie par

$$\delta'(q, a) =$$

Complétion

Lemme

Pour tout automate fini déterministe A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.
2. On construit $A' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ comme suit :
3. $Q' = Q \cup \{q_p\}$ où $q_p \notin Q$,
4. $q_0' = q_0$ et $F' = F$.
5. La fonction $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ est définie par

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } q \in Q \text{ et } \delta(q, a) \text{ est défini,} \\ \end{cases}$$

Complétion

Lemme

Pour tout automate fini déterministe A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.
2. On construit $A' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ comme suit :
3. $Q' = Q \cup \{q_p\}$ où $q_p \notin Q$,
4. $q_0' = q_0$ et $F' = F$.
5. La fonction $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ est définie par

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } q \in Q \text{ et } \delta(q, a) \text{ est défini,} \\ q_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Complétion

Lemme

Pour tout automate fini déterministe A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$.
2. On construit $A' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ comme suit :
3. $Q' = Q \cup \{q_p\}$ où $q_p \notin Q$,
4. $q_0' = q_0$ et $F' = F$.
5. La fonction $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ est définie par

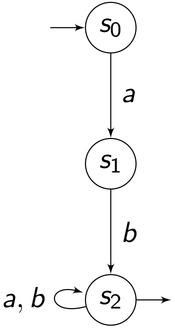
$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } q \in Q \text{ et } \delta(q, a) \text{ est défini,} \\ q_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Maintenant il faut démontrer que, en fait, $L(A') = L(A)$.

Non-déterminisme

Exemple

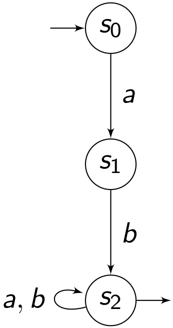
L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* :



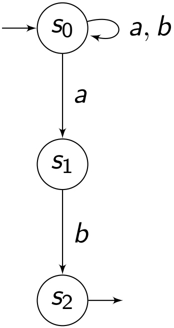
L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui se terminent par *ab* :

Exemple

L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* :

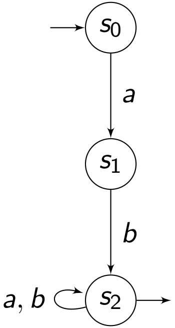


L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui se terminent par *ab* :

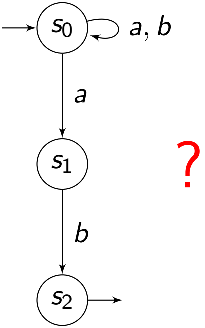


Exemple

L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui commencent par *ab* :



L'algorithme le plus simple qui décide le langage de tous les mots qui se terminent par *ab* :



- pas un algorithme !
- *abab* ???

Automates finis (non-déterministes)

Définition (4.8)

Un automate fini est une structure $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ où

- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $q_0 \in Q$ est l'état initial,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ est la relation de transition.

Automates finis (non-déterministes)

Définition (4.8)

Un automate fini est une structure $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ où

- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ est la relation de transition.

- pas trop pratique pour l'implémentation
- mais bien utile en théorie !

Comment ça marche

Un automate fini : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $Q_0, F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$: la relation de transition

On note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$.

Définition

- Un calcul dans A est une séquence $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$.
- L'étiquette d'un calcul comme ci-dessus est
  $$\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*.$$
- Un calcul comme ci-dessus est réussi si $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$.
- Le langage reconnu par A est
  $$L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}.$$

Comment ça marche

Un automate fini : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $Q_0, F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$: la relation de transition

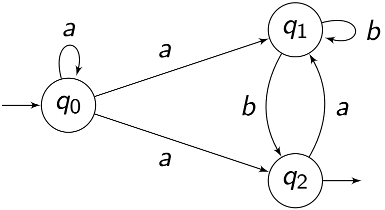
On note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$. $\Longleftarrow$ la seule chose qui a changé !

Définition

- Un calcul dans A est une séquence $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$.
- L'étiquette d'un calcul comme ci-dessus est
  $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$.
- Un calcul comme ci-dessus est réussi si $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$.
- Le langage reconnu par A est
  $L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$.

5 minutes de réflexion

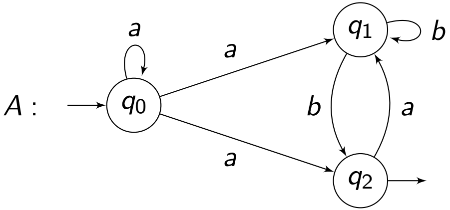
A :



Vrai ou faux ?

1. $baba \in L(A)$
2. $abab \in L(A)$
3. $aaab \in L(A)$
4. $aaaa \in L(A)$
5. $\varepsilon \in L(A)$
6. $L(a^* ab^* b) \subseteq L(A)$

5 minutes de réflexion



Vrai ou faux ?

1. $baba \in L(A)$ ✗
2. $abab \in L(A)$ ✓
3. $aaab \in L(A)$ ✓
4. $aaaa \in L(A)$ ✓
5. $\varepsilon \in L(A)$ ✗
6. $L(a^*ab^*b) \subseteq L(A)$ ✓

Langages reconnaissables

Définition

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnaissable si il existe un automate fini A tel que $L = L(A)$.

Théorème

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnaissable ssi il existe un automate fini

- *déterministe,*
- *déterministe complet, ou*
- *(non-déterministe) à transitions spontanées*

A tel que $L = L(A)$.

- donc sémantiquement c'est tout là même chose : automates finis non-déterministes, automates finis déterministes, automates finis déterministes complets

Automates finis aux transitions spontanées

Définition (4.11)

Un automate fini à transitions spontanées est une structure $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ où

- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ est la relation de transition.

- peut changer de l'état spontanément sans lire un symbole

Comment ça marche

Un automate fini à transitions spontanées : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $Q_0, F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

On note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$. $\Longleftarrow$ donc a peut être ε

Définition

- Un calcul dans A est une séquence $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$.
- L'étiquette d'un calcul comme ci-dessus est
  $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$.
- Un calcul comme ci-dessus est réussi si $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$.
- Le langage reconnu par A est
  $L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$.

- note $a\varepsilon b\varepsilon a\varepsilon b = abab$, par exemple

Théorème de Kleene

Théorème (Kleene)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il est reconnaissable.

syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\nmid\cap$		$\Vert$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\nmid\cap$		$\Vert$?
automates finis	$\xrightarrow{L(\cdot)}$	langages reconnaissables
$\nmid\cap$		$\Vert$?
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\Vert$?
expressions rationnelles		langages rationnelles

Fin à la spontanéité

Lemme

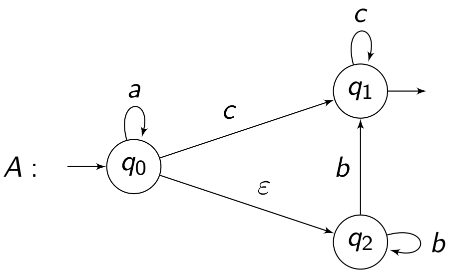
Pour tout automate fini à transitions spontanées A il existe un automate fini A' tel que $L(A') = L(A)$.

- on note $q \xrightarrow{\varepsilon}^* r$ si il existe une suite $q \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} r$ de transitions spontanées

Démonstration.

1. Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. On construit $A' = (\Sigma, Q', Q_0', F', \delta')$ comme suit :
3. $Q' = Q$, $Q_0' = Q_0$,
4. $F' = \{q \in Q \mid \exists r \in F : q \xrightarrow{\varepsilon}^* r\}$, et
5. $\delta' = \{(p, a, r) \mid \exists q \in Q : p \xrightarrow{\varepsilon}^* q \text{ et } (q, a, r) \in \delta\}$.
6. Maintenant il faut démontrer que, en fait, $L(A') = L(A)$.

5 minutes de réflexion

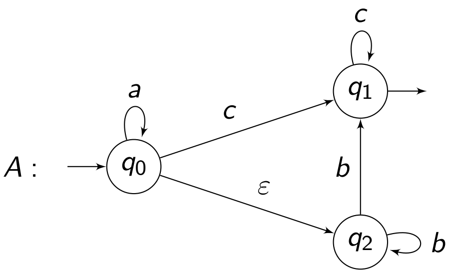


Vrai ou faux ?

1. $acc \in L(A)$
2. $acb \in L(A)$
3. $abc \in L(A)$
4. $abb \in L(A)$

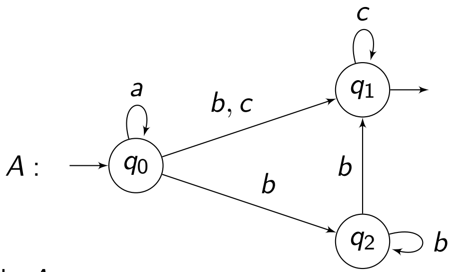
Construire l'ε-fermeture arrière de A.

5 minutes de réflexion



Vrai ou faux ?

1. $acc \in L(A)$ ✓
2. $acb \in L(A)$ ✗
3. $abc \in L(A)$ ✓
4. $abb \in L(A)$ ✓



Construire l'ε-fermeture arrière de A.

Déterminisation

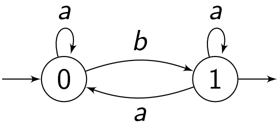
Automate des parties

Définition

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini. L'automate des parties de A est l'automate fini déterministe complet $A' = (\Sigma, Q', q_0', F', \delta')$ définit comme suite :

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q,
- $q_0' = Q_0$,
- $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$, et
- $\delta'(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta\}$.

Exemple (sur tableau)



Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.
5. On a $q_i \in Q_i$ pour tout i, donc $q_n \in Q_n \cap F$, c.à.d. $Q_n \in F'$, alors σ' est un calcul réussi, donc $w \in L(A')$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

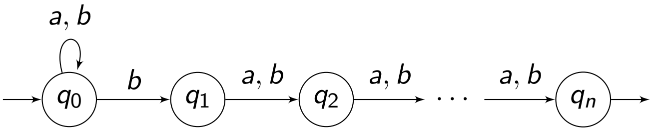
1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.
5. On a $q_i \in Q_i$ pour tout i, donc $q_n \in Q_n \cap F$, c.à.d. $Q_n \in F'$, alors σ' est un calcul réussi, donc $w \in L(A')$.

Et l'autre direction ?

Le non-déterminisme paye

- le non-déterminisme est utile pour des spécifications partielles
- des automates finis non-déterministes peuvent être exponentiellement plus distinctes que des automates finis déterministes :

Exercice : Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



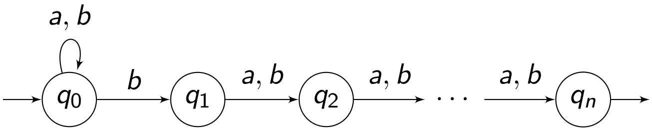
1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

Le non-déterminisme paye

- le non-déterminisme est utile pour des spécifications partielles
- des automates finis non-déterministes peuvent être exponentiellement plus distinctes que des automates finis déterministes :

Exercice : Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

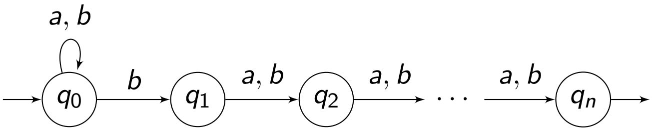
$$(a+b)^* b (a+b)^{n-1}$$

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

Le non-déterminisme paye

- le non-déterminisme est utile pour des spécifications partielles
- des automates finis non-déterministes peuvent être exponentiellement plus distinctes que des automates finis déterministes :

Exercice : Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

   $(a+b)^* b (a+b)^{n-1}$

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

   2^n

Théorème de Kleene

Théorème de Kleene

Théorème (Kleene)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il est reconnaissable.

syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\|$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\subsetneq$	$L(\cdot)$	$\|$ ✓
automates finis	$\longrightarrow$	langages reconnaissables
$\subsetneq$		$\|$ ✓
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\|$?
expressions rationnelles		langages rationnelles

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \varnothing$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

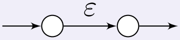
1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \varnothing$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \varnothing$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$  .

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

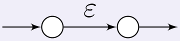
1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) = \;\to\bigcirc \qquad \bigcirc\to$ (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) = \;\to\bigcirc \xrightarrow{\varepsilon} \bigcirc\to$.
6. Si $e = a \in \Sigma$, alors soit $A(e) =$

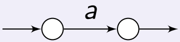
Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle.
2. On construit, par induction structurelle, un automate fini $A(e)$ à transitions spontanées tel que $L(A(e)) = L(e)$.
3. Nos automates vont être pures, avec un unique état initial sans transitions entrantes et symétriquement pour l'état final.
4. Si $e = \emptyset$, alors soit $A(e) =$  (sans transitions).
5. Si $e = \varepsilon$, alors soit $A(e) =$ 

.
6. Si $e = a \in \Sigma$, alors soit $A(e) =$ 

.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

7. Si $e = e_1 e_2$, alors prenons $A(e_1) = \longrightarrow (i_1) \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow (f_1) \longrightarrow$ et $A(e_2) = \longrightarrow (i_2) \longrightarrow \boxed{Q_2} \longrightarrow (f_2) \longrightarrow$ et construisons

$$A(e) = \longrightarrow (i_1) \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow (f_1) \xrightarrow{\varepsilon} (i_2) \longrightarrow \boxed{Q_2} \longrightarrow (f_2) \longrightarrow \quad .$$

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

8. Si $e = e_1 + e_2$, alors prenons $A(e_1) = \longrightarrow (i_1) \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow (f_1) \longrightarrow$ et $A(e_2) = \longrightarrow (i_2) \longrightarrow \boxed{Q_2} \longrightarrow (f_2) \longrightarrow$ et construisons

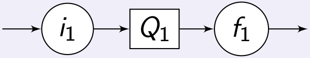
   $A(e) =$

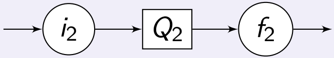
Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

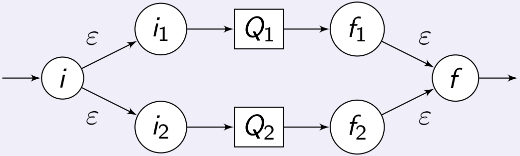
Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

8. Si $e = e_1 + e_2$, alors prenons $A(e_1) =$ 

et $A(e_2) =$ 

et construisons

$A(e) =$ 

.

Algorithme de Thompson

Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

9. Si $e = e_1^*$, alors prenons $A(e_1) = \longrightarrow i_1 \longrightarrow \boxed{Q_1} \longrightarrow f_1 \longrightarrow$ et construisons

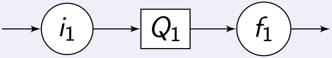
$A(e) =$

Algorithme de Thompson

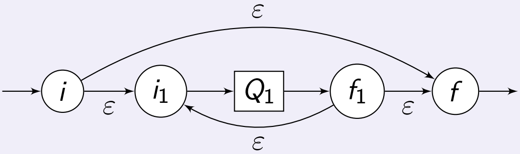
Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

9. Si $e = e_1^*$, alors prenons $A(e_1) =$ 

et construisons

$A(e) =$ 

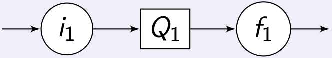
.

Algorithme de Thompson

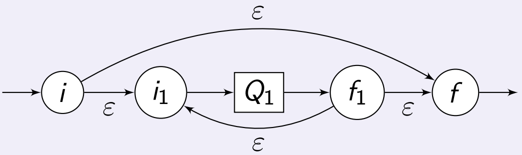
Lemme (Thompson)

Pour toute expression rationnelle e il existe un automate fini à transitions spontanées A tel que $L(e) = L(A)$.

Démonstration (suite).

9. Si $e = e_1^*$, alors prenons $A(e_1) =$ 

   et construisons

   $A(e) =$ 

   .

10. Maintenant il faut démontrer que $L(A(e)) = L(e)$ en chaque cas.

Exercice

Utiliser l'algorithme de Thompson pour convertir l'expression rationnelle $a(b^*a + b)$ en automate fini à transitions spontanées.

Théorème de Kleene

Théorème (Kleene)

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il est reconnaissable.

Démonstration.

$\Longrightarrow$ algorithme de Thompson : convertir une expression rationelle dans un automate fini à transitions spontanées ✓

$\Longleftarrow$ algorithme de Brzozowski & McCluskey : convertir un automate fini dans une expression rationelle $\longleftarrow$ maintenant

- outil : automates finis généralisés, avec transitions étiquetées en expressions rationnelles

Automates finis généralisés

Définition

Un automate fini généralisé est une structure $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ où

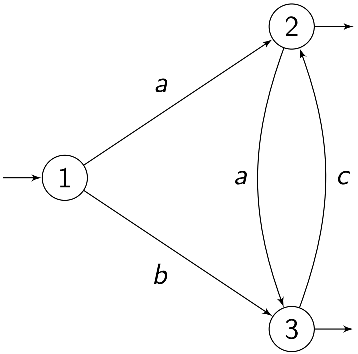
- Σ est un ensemble fini de symboles,
- Q est un ensemble fini d'états,
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux,
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux, et
- $\delta \subseteq Q \times RE(\Sigma) \times Q$ est la relation de transition.

- un calcul dans A : $\sigma = q_1 \xrightarrow{e_1} q_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} q_n$
- l'étiquette d'un calcul : $\lambda(\sigma) = e_1 e_2 \dots e_{n-1} \in RE(\Sigma)$
- un calcul réussi : $q_1 \in Q_0$ et $q_n \in F$
- Le langage reconnu par A :
$$L(A) = \bigcup \{ L(\lambda(\sigma)) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A \}$$

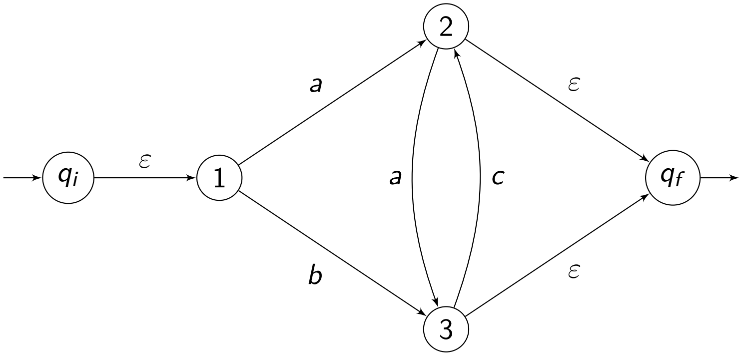
Algorithme de Brzozowski & McCluskey

1. Soit A un automate fini
2. « Convertir » A en automate fini généralisé
3. Convertir A en automate fini généralisé pure :
   - une unique transition entre chaque pair d'états
   - un état initial unique q_0 sans transitions entrantes
   - un état final unique q_f sans transitions sortantes
4. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
   - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
   - corriger étiquettes
5. `return` l'étiquette de la transition unique

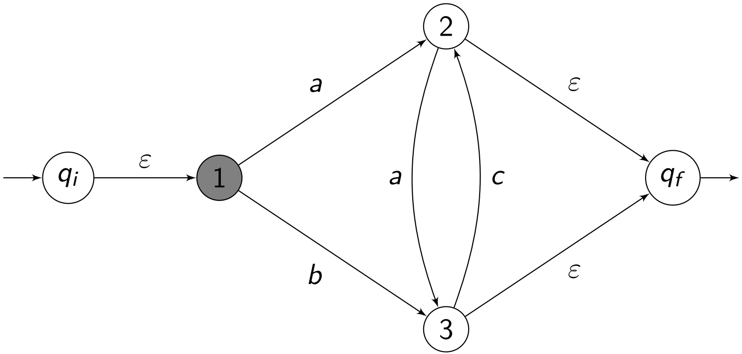
Exemple



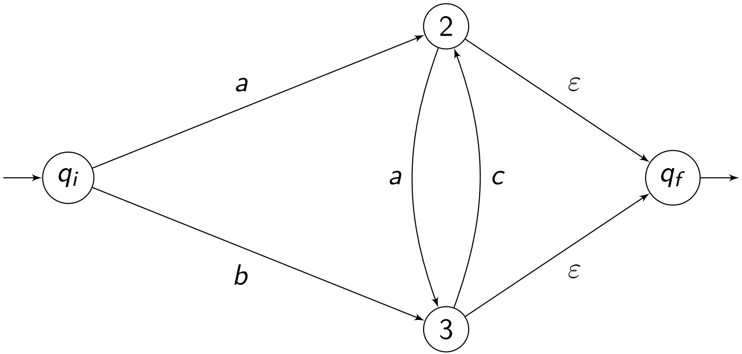
Exemple



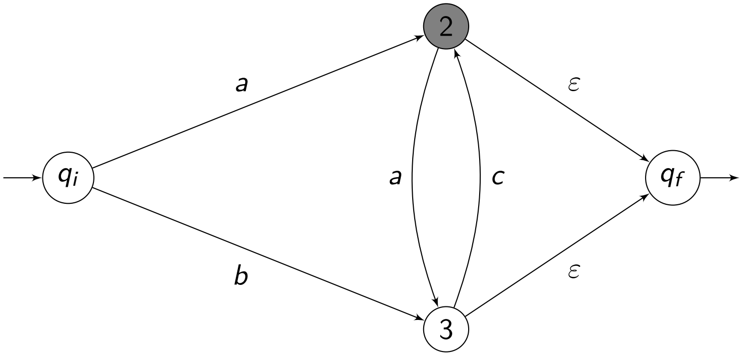
Exemple



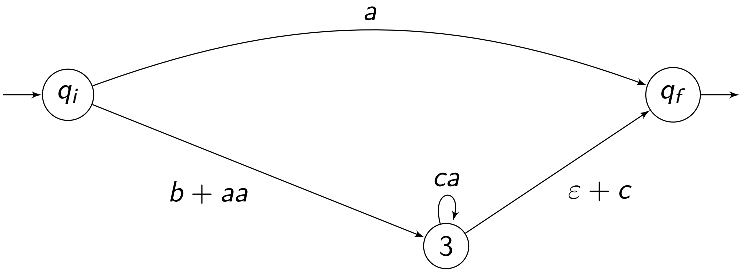
Exemple



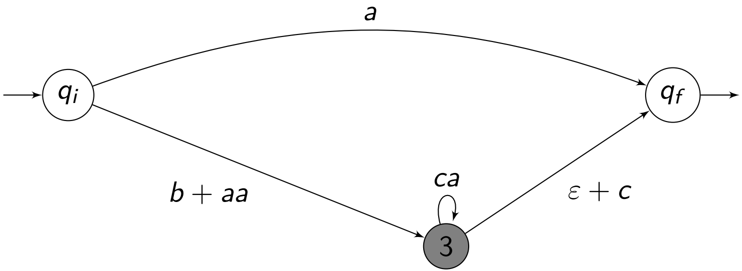
Exemple



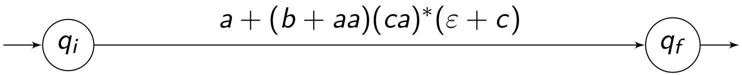
Exemple



Exemple



Exemple



Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
   - une unique transition entre chaque pair d'états
   - un état initial unique q_0 sans transitions entrantes
   - un état final unique q_f sans transition sortante

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
    - une unique transition entre chaque pair d'états
    - un état initial unique q_0 sans transitions entrantes
    - un état final unique q_f sans transition sortante

- $Q' = Q \cup \{q_0, q_f\}$ pour $q_0, q_f \notin Q$
- $\Delta : Q' \times Q' \to RE(\Sigma)$
- $\Delta(q_1, q_2) = \sum \{a \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\}$ pour $q_1, q_2 \in Q$
    - c.à.d. $\Delta(q_1, q_2) = \varnothing$ si $\{a \mid (q_1, a, q_2) \in \delta\} = \emptyset$
- $\Delta(q_i, q_2) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } q_2 \in Q_0 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$ $\qquad \Delta(q_1, q_f) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } q_1 \in F \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
3. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
   - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
   - corriger étiquettes

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
3. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
    - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
    - corriger étiquettes

- $Q' \leftarrow Q' \setminus \{q\}$
- pour tout $p, r \in Q'$ (donc aussi pour $p = r$!) :
- $\Delta(p, r) \leftarrow \Delta(p, r) + \Delta(p, q)\Delta(q, q)^*\Delta(q, r)$

Algorithme de Brzozowski & McCluskey, détail

1. Soit $(\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini
2. Convertir A en automate fini généralisé pure $(\Sigma, Q', q_0, f, \Delta)$:
3. `while` $Q \neq \{q_0, q_f\}$:
    - supprimer un état $q \notin \{q_0, q_f\}$
    - corriger étiquettes

- $Q' \leftarrow Q' \setminus \{q\}$
- pour tout $p, r \in Q'$ (donc aussi pour $p = r$!) :
- $\Delta(p, r) \leftarrow \Delta(p, r) + \Delta(p, q)\Delta(q, q)^*\Delta(q, r)$

4. `return` l'étiquette de la transition unique

- donc $\Delta(q_i, q_f)$

Exercice

Utiliser

1. l'algorithme de Thompson pour convertir l'expression rationnelle $a(b^*a + b)$ en automate fini à transitions spontanées A ;
2. l'algorithme de Brzozowski et McCluskey pour reconvertir A en expression rationnelle.

Conclusion

Récapitulatif

1. Mots, langages
2. Langages rationnels
3. Expressions rationnelles
4. Automates finis
5. Langages reconnaissables

- poly chapitres 1-4
- moins 2.3.2-2.3.5, 2.4.4, 3.1.3, 4.1.3, 4.2.1, 4.3, 4.4

Applications

- automate fini $\hat{=}$ algorithme en mémoire constante
- lien vers les algorithmes online / streaming
- parsage, analyse lexicale, `grep` etc. : expression rationnelle $\rightsquigarrow$ automate fini déterministe / non-déterministe (!)
- apprentissage par automates : automate fini $\hat{=}$ représentation compacte – algorithme de Angluin
- traduction automatique : automates probabilistes
- vérification : modélisation par automates probabilistes / pondérés / temporisés / hybrides / etc.
- et après ? langages algébriques, automates à pile, analyse syntaxique, compilation $\rightsquigarrow$ la prochaine fois


That's all Folks!