Théorie des langages rationnels : THLR

CM 2

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S3 2024

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Dernièrement : L'algèbre de mots

Soit Σ un ensemble fini.

- on appelle les éléments $a, b, \ldots \in \Sigma$ des symboles

On dénote Σ^* l'ensemble de tous les suites finies d'éléments de Σ.

- donc $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$
- on appelle les éléments $u, v, w, \ldots \in \Sigma^*$ des mots

La concaténation de deux mots $a_1 \ldots a_n$ et $b_1 \ldots b_m$ est le mot $a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$.

- ε : le mot vide
- l'opération « . » sur mots est associative et a ε comme élément neutre de deux côtés

La longueur $|u|$ d'un mot $u \in \Sigma^*$: le nombre de symboles de u.

- $|\varepsilon| = 0$ et $|uv| = |u| + |v|$
- u^n : la concaténation de n copies de u
- $|u^n| = n\,|u|$

Dernièrement : L'algèbre de langages

Un langage est un sous-ensemble $L \subseteq \Sigma^*$.

- opérations ensemblistes : $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\overline{L}$
- concaténation : $L_1\, L_2 = \{u_1\, u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$
- $L^n = L \cdots L$ (n copies de L)
- étoile de Kleene : $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \cdots = \bigcup_{n \geq 0} L^n$

L'opération « . » sur langages est associative et a $\{\varepsilon\}$ comme élément neutre de deux côtés.

- $L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. $\{a\}^n = \{a^n\}$
2. $\{a, b\}^n = \{a^n, b^n\}$
3. L^* est un ensemble infini pour tout $L \subseteq \Sigma^*$
4. pour tout $L \subseteq \Sigma^*$ et $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{u \in L \mid |u| \leq n\}$ est un ensemble fini
5. $\{a, b\}^* = \{a\}^*\{b\}^*$
6. $\{a, b\}^* = \big(\{a\}^*\{b\}\big)^*\{a\}^*$
7. $(L_1 \cup L_2)^* = \big(L_1^* L_2\big)^* L_1^*$

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. $\{a\}^n = \{a^n\}$ ✓
2. $\{a, b\}^n = \{a^n, b^n\}$ ✗
3. L^* est un ensemble infini pour tout $L \subseteq \Sigma^*$ ✗
4. pour tout $L \subseteq \Sigma^*$ et $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{u \in L \mid |u| \leq n\}$ est un ensemble fini ✓
5. $\{a, b\}^* = \{a\}^*\{b\}^*$ ✗
6. $\{a, b\}^* = (\{a\}^*\{b\})^*\{a\}^*$ ✓
7. $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2)^* L_1^*$ ✓

Langages rationnels

Opérations rationnelles

Soit Σ un alphabet, on travaille avec des langages dans $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Définition

Les opérations rationnelles dans $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ sont $\cup$, . et *.

- donc union, concaténation et étoile de Kleene

Théorème (pour plus tard) : Toutes les autres opérations sont exprimables par $\cup$, . et *.

Exemples :

- $\text{Pref}(\{a\}\{b\}^*) = \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cup \{a\}\{b\}^*$
- $\text{Suff}(\{a\}\{b\}^*) =$
- $\{a\}\{b\}^* \cap \{a\}^*\{b\} =$

Opérations rationnelles

Soit Σ un alphabet, on travaille avec des langages dans $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Définition

Les opérations rationnelles dans $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ sont $\cup$, $.$ et *.

- donc union, concaténation et étoile de Kleene

Théorème (pour plus tard) : Toutes les autres opérations sont exprimables par $\cup$, $.$ et *.

Exemples :

- $\text{Pref}(\{a\}\{b\}^*) = \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cup \{a\}\{b\}^*$
- $\text{Suff}(\{a\}\{b\}^*) = \{b\}^* \cup \{a\}\{b\}^*$
- $\{a\}\{b\}^* \cap \{a\}^*\{b\} =$

Opérations rationnelles

Soit Σ un alphabet, on travaille avec des langages dans $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Définition

Les opérations rationnelles dans $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ sont $\cup$, . et *.

- donc union, concaténation et étoile de Kleene

Théorème (pour plus tard) : Toutes les autres opérations sont exprimables par $\cup$, . et *.

Exemples :

- $\text{Pref}(\{a\}\{b\}^*) = \{\varepsilon\} \cup \{a\} \cup \{a\}\{b\}^*$
- $\text{Suff}(\{a\}\{b\}^*) = \{b\}^* \cup \{a\}\{b\}^*$
- $\{a\}\{b\}^* \cap \{a\}^*\{b\} = \{a\}\{b\}$

Langages rationnels

Définition (3.1)

Les langages rationnels sur Σ sont définis inductivement comme suite :

1. $\emptyset$ et $\{\varepsilon\}$ sont des langages rationnels
2. pour tout $a \in \Sigma$, $\{a\}$ est un langage rationnel
3. si L_1 et L_2 sont des langages rationnels, alors $L_1 \cup L_2$, $L_1.L_2$ et L_1^* le sont également

- $\{\varepsilon\} = \emptyset^* \Rightarrow$ on peut enlever $\{\varepsilon\}$ de la définition

Lemme

L est rationnel si et seulement si

- *$L = \emptyset$ ou $L = \{a\}$ pour un $a \in \Sigma$ ou*
- *$L = L_1 \cup L_2$, $L = L_1 L_2$ ou $L = L_1^*$ pour L_1 et L_2 rationnels.*

(En quoi ce lemme est-il différent de la définition ?)

Rationalité

Théorème

Si L_1 *et* L_2 *sont des langages rationnels, alors* $L_1 \cap L_2$, $\overline{L}_1$, $\mathrm{Pref}(L_1)$, $\mathrm{Suff}(L_1)$ *et* $\mathrm{Fact}(L_1)$ *le sont aussi.*

- pour la démonstration faut attendre quelques jours

5 minutes de réflexion

Rationnel ou pas rationnel, sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$?

1. $\{a, b, abcba\}$
2. $\{a^n \mid n \geq 0\}$
3. $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contient au moins trois } a\}$
4. $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 5\}$
5. $\{a^{2n} \mid n \geq 0\}$
6. $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
7. $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$
8. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

5 minutes de réflexion

Rationnel ou pas rationnel, sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$?

1. $\{a, b, abcba\}$ ✓
2. $\{a^n \mid n \geq 0\}$ ✓
3. $\{w \in \Sigma^* \mid w$ contient au moins trois $a\}$ ✓
4. $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 5\}$ ✓
5. $\{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ ✓
6. $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ ✗
7. $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$ ✓
8. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ✗

Expressions rationnelles

Expressions rationnelles

Une notation pratique pour des langages rationnels :

Définition (3.2)

Les expressions rationnelles sur Σ sont définis inductivement comme suite :

1. $\emptyset$ et ε sont des expressions rationnelles
2. pour tout $a \in \Sigma$, a est une expression rationnelle
3. si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles, alors $e_1 + e_2$, $e_1 . e_2$ et e_1^* le sont également

Expressions rationnelles

Une notation pratique pour des langages rationnels :

Définition (3.1, *recall*)

Les langages rationnels sur Σ sont définis inductivement comme suite :

1. $\emptyset$ et $\{\varepsilon\}$ sont des langages rationnels
2. pour tout $a \in \Sigma$, $\{a\}$ est un langage rationnel
3. si L_1 et L_2 sont des langages rationnels , alors $L_1 \cup L_2$, $L_1 . L_2$ et L_1^* le sont également

- presque la même chose ! mais
- 3.1 introduit une classe de sous-ensembles de Σ^*,
- 3.2 définit des expressions syntaxiques

Expressions rationnelles

Une notation pratique pour des langages rationnels :

Définition (3.2)

Les expressions rationnelles sur Σ sont définis inductivement comme suite :

1. $\emptyset$ et ε sont des expressions rationnelles
2. pour tout $a \in \Sigma$, a est une expression rationnelle
3. si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles, alors $e_1 + e_2$, $e_1 . e_2$ et e_1^* le sont également

- presque la même chose ! mais
- 3.1 introduit une classe de sous-ensembles de Σ^*,
- 3.2 définit des expressions syntaxiques

On va relier les deux en donnant une sémantique aux expressions rationnelles.

Sémantique

Définition

Le langage dénoté par une expression rationnelle e sur Σ est $L(e) \subseteq \Sigma^*$ définit inductivement comme suite :

1. $L(\varnothing) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
2. $L(a) = \{a\}$ pour tout $a \in \Sigma$
3. $L(e_1 + e_2) = L(e_1) \cup L(e_2)$, $L(e_1 . e_2) = L(e_1) . L(e_2)$, $L(e^*) = (L(e))^*$

Théorème

$L \subseteq \Sigma^*$ est rationnel ssi il existe une expression rationnelle e telle que $L = L(e)$.

Démonstration.

Par induction structurelle ...

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\text{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\text{pref}(e)$ telle que $L(\text{pref}(e)) = \text{Pref}(L)$.
3. . . . par induction structurelle :

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. … par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\emptyset) =$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) =$, $\mathrm{pref}(a) =$

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. … par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mathrm{pref}(a) = a + \varepsilon$

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. ... par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mathrm{pref}(a) = a + \varepsilon$
5. $\mathrm{pref}(e_1 + e_2) =$
   $\mathrm{pref}(e_1 e_2) =$
   $\mathrm{pref}(e^*) =$

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. . . . par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mathrm{pref}(a) = a + \varepsilon$
5. $\mathrm{pref}(e_1 + e_2) = \mathrm{pref}(e_1) + \mathrm{pref}(e_2)$
   $\mathrm{pref}(e_1 e_2) =$
   $\mathrm{pref}(e^*) =$

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. ... par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mathrm{pref}(a) = a + \varepsilon$
5. $\mathrm{pref}(e_1 + e_2) = \mathrm{pref}(e_1) + \mathrm{pref}(e_2)$
   $\mathrm{pref}(e_1 e_2) = \mathrm{pref}(e_1) + e_1\, \mathrm{pref}(e_2)$
   $\mathrm{pref}(e^*) =$

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. ... par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mathrm{pref}(a) = a + \varepsilon$
5. $$\begin{aligned} \mathrm{pref}(e_1 + e_2) &= \mathrm{pref}(e_1) + \mathrm{pref}(e_2) \\ \mathrm{pref}(e_1 e_2) &= \mathrm{pref}(e_1) + e_1\, \mathrm{pref}(e_2) \\ \mathrm{pref}(e^*) &= e^* \mathrm{pref}(e) \end{aligned}$$ (voir tableau)

Pour en finir, une autre démonstration

Théorème

Si L est un langage rationnel, alors $\mathrm{Pref}(L)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

1. Soit e une expression rationnelle telle que $L = L(e)$.
2. Nous construirons une expression rationnelle $\mathrm{pref}(e)$ telle que $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
3. … par induction structurelle :
4. $\mathrm{pref}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{pref}(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mathrm{pref}(a) = a + \varepsilon$
5. $$\begin{aligned} \mathrm{pref}(e_1 + e_2) &= \mathrm{pref}(e_1) + \mathrm{pref}(e_2) \\ \mathrm{pref}(e_1 e_2) &= \mathrm{pref}(e_1) + e_1\,\mathrm{pref}(e_2) \\ \mathrm{pref}(e^*) &= e^*\mathrm{pref}(e) \qquad (\text{ voir tableau }) \end{aligned}$$
6. Maintenant il faut démontrer que, en fait, $L(\mathrm{pref}(e)) = \mathrm{Pref}(L)$.
7. … par induction structurelle, encore …

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cup L_2$ est rationnel
2. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ est rationnel
3. Chaque sous-ensemble d'un langage rationnel L est rationnel.

Pour chaque expression rationnelle suivante sur alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, trouvez deux mots qui appartiennent de leur langage et deux autres qui ne l'appartiennent pas :

4. $a^* b^*$
5. $a^* + b^*$
6. $(aaa)^*$
7. $(a+b)^* ab \,(a+b)^* ba \,(a+b)^*$
8. $(a^* b)^* (b^* a)^*$

5 minutes de réflexion

Vrai ou faux ?

1. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cup L_2$ est rationnel ✓
2. Si L_1 et L_2 sont rationnels, alors $L_1 \cap L_2$ est rationnel ✓
3. Chaque sous-ensemble d'un langage rationnel L est rationnel. ✗

Pour chaque expression rationnelle suivante sur alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, trouvez deux mots qui appartiennent de leur langage et deux autres qui ne l'appartiennent pas :

4. $a^* b^*$
5. $a^* + b^*$
6. $(aaa)^*$
7. $(a+b)^* ab (a+b)^* ba (a+b)^*$
8. $(a^* b)^* (b^* a)^*$

Bonus

Bonus : monoïdes et demi-anneaux

La structure $(\Sigma^*, ., \varepsilon)$ des mots sur Σ forme un monoïde.

- comme un groupe, mais sans inverses
- (et pas commutative)

En fait, le monoïde libre sur Σ.

- donc tout monoïde est un quotient d'un monoïde Σ^* pour quelque Σ

La structure $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, ., \emptyset, \{\varepsilon\})$ des langages sur Σ forme un demi-anneau.

- comme un anneau, mais sans inverses additifs
- langages finis sur Σ : le demi-anneau idempotent libre sur Σ

Avec l'étoile de Kleene, $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, ., ^*, \emptyset, \{\varepsilon\})$ forme un algèbre de Kleene.

- structure algébrique fondamentale pour l'informatique
- mais c'est quoi les algèbres de Kleene libres ?

Bonus : algèbres de Kleene

Un demi-anneau est une structure algébrique $(S, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ telle que

- $(S, \oplus, \mathbb{0})$ forme un monoïde commutatif,
- $(S, \otimes, \mathbb{1})$ forme un monoïde,
- $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$ et $x\mathbb{0} = \mathbb{0}x = \mathbb{0}$

S est idempotent si $x \oplus x = x$.

Théorème

L'ensemble de langages finis forme le demi-anneau idempotent libre.

Une algèbre de Kleene est un demi-anneau idempotent S équipé avec toutes les sommes géométriques $\bigoplus_{n\geq 0} x^n$, pour tout $x \in S$, et telle que $x \otimes \left(\bigoplus_{n\geq 0} y^n\right) \otimes z = \bigoplus_{n\geq 0}(xy^n z)$ pour tout $x, y, z \in S$.

Théorème

L'ensemble de langages rationnels forme l'algèbre de Kleene libre.

Un peu de maths

Nombres

- des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- des nombres réels : $\mathbb{R} =$?
- (des nombres complexes : *on s'en fout ici*)

Construction

Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk

— L. Kronecker 1886

- de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ modulo la relation d'équivalence
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_2 = x_2 + y_1$$
- de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ modulo la relation d'équivalence
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 y_2 = x_2 y_1$$
- de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$: via des suites convergentes / suites de Cauchy :
  - soit $S = \{(x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{Q}^\infty \mid \lim_{m,n\to\infty} (x_m - x_n) = 0\}$
  - soit $\sim$ la relation d'équivalence sur S défini par
  $$(x_0, x_1, \dots) \sim (y_0, y_1, \dots) \iff \lim_{m,n\to\infty} (x_m - y_n) = 0$$
  - alors $\mathbb{R} = S_{/\sim}$

Dénombrabilité

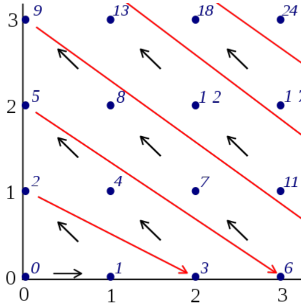
Définition

Un ensemble S est dénombrable s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to S$.

- $\mathbb{N}$ est triviellement dénombrable.
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable via la bijection $f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair :} \end{cases}$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

- $\mathbb{Q}^+$ est dénombrable comme suite :



Argument de la diagonale de Cantor

Théorème (G. Cantor 1891)

$\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

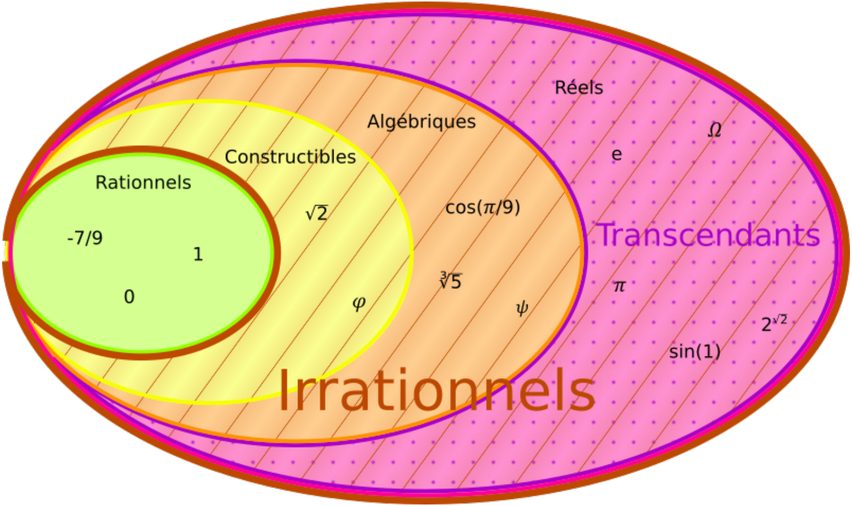
Démonstration.

1. Supposons que $\mathbb{R}$ soit dénombrable, alors l'intervalle ouvert $S = \{x \mid 0 < x < 1\}$ l'est aussi.
2. Soit $E = \{x_0, x_1, \dots\}$ une énumération de S. Notons alors

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}c_{00}\, c_{01}\, c_{02} \dots \\ x_1 &= 0{,}c_{10}\, c_{11}\, c_{12} \dots \\ x_2 &= 0{,}c_{20}\, c_{21}\, c_{22} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. Soit $d_n = 9 - c_{nn}$ pour tout $n \geq 0$ et $y = 0{,}d_0 d_1 d_2 \dots$
4. Alors $y \in S$, mais $y \neq x_n$ pour tout $n \geq 0$, donc $y \notin E$. $\lightning$

Nombres réels



Bonus bonus

Vous vous souvenez ?

Définition

Un langage L est récursivement énumerable s'il existe un algorithme qui énumère tout les mots de L.

Théorème

Il existe un langage qui n'est pas récursivement énumerable.

Démonstration.

1. L'ensemble de tous algorithmes est dénombrable. *(Pourquoi ? Qu'est-ce que ?)*
2. Chaque algorithme n'énumère guère qu'un langage.
3. L'ensemble de langages n'est pas dénombrable. *(Pourquoi ?)*

L'ensemble de langages n'est pas dénombrable

- Soit Σ un alphabet (un ensemble fini non-vide)
- Un langage est un sous-ensemble $L \subseteq \Sigma^*$

$\Rightarrow$ L'ensemble de langages : $\mathcal{P}(\Sigma^*)$

Théorème

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration.

L'ensemble de langages n'est pas dénombrable

- Soit Σ un alphabet (un ensemble fini non-vide)
- Un langage est un sous-ensemble $L \subseteq \Sigma^*$

$\Rightarrow$ L'ensemble de langages : $\mathcal{P}(\Sigma^*)$

Théorème

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration.

1. Supposons que $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ soit dénombrable, alors le sous-sensemble $\mathcal{J} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ infini } \}$ l'est aussi.
2. Soit $E = \{L_0, L_1, \dots\}$ une énumération de $\mathcal{J}$. Chaque L_i est dénombrable, alors notons $L_i = \{w_{i,0}, w_{i,1}, \dots\}$.
3. Soit $L = \bigcup_{i=0}^{\infty}(L_i \setminus \{w_{i,i}\})$.
4. Alors $L \in \mathcal{J}$, mais $L \neq L_i$ pour chaque i : il n'est pas dans notre énumération E. $\lightning$


That's all Folks!