Théorie des langages rationnels : THLR

CM 4

Uli Fahrenberg

EPITA Rennes

S3 2024

Aperçu

Programme du cours

1. Mots, langages
2. Langages rationnels, expressions rationnelles
3. Automates finis
4. Langages non-rationnels
5. Langages reconnaissables, minimisation

Dernièrement : Automates finis

Définition

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$:

- Σ : ensemble fini de symboles, Q : ensemble fini d'états
- $Q_0 \subseteq Q$: états initiaux, $F \subseteq Q$: états finaux
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: relation de transition

- on note $q \xrightarrow{a} r$ si $(q, a, r) \in \delta$

Définition (Sémantique de A)

- Un calcul dans A : $\sigma = q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$
- L'étiquette d'un calcul : $\lambda(\sigma) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \in \Sigma^*$
- Un calcul réussi : $q_1 = q_0$ et $q_n \in F$
- Le langage reconnu par A :
  $$L(A) = \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \text{ calcul réussi dans } A\}$$

Variants

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

Définition

- A est sans transitions spontanées si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.
- A est complet si $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\}| \geq 1$.
- A est déterministe si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, $|Q_0| = 1$ et
  $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\} \leq 1$.

On les a vu dans l'ordre

1. automates finis déterministes complets
2. automates finis déterministes
3. automates finis (sans transitions spontanées)
4. automates finis (à transitions spontanées)

Variants

Un automate fini (à transitions spontanées) : $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$:

- Σ, Q ensembles finis, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$,
- $\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$: la relation de transition

Définition

- A est sans transitions spontanées si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.
- A est complet si $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\}| \geq 1$.
- A est déterministe si $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, $|Q_0| = 1$ et
  $\forall q \in Q : \forall a \in \Sigma : |\{r \in Q \mid (q, a, r) \in \delta\} \leq 1$.

On les a vu dans l'ordre

1. automates finis déterministes complets — DFA
2. automates finis déterministes
3. automates finis (sans transitions spontanées) — NFA
4. automates finis (à transitions spontanées) — ε-NFA

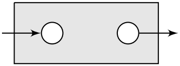
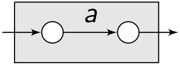
Dernièrement : Langages reconnaissables

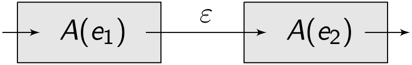
Définition

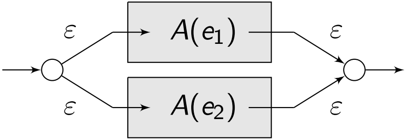
Un langage L est reconnaissable si $\exists$ un automate fini A t.q. $L = L(A)$.

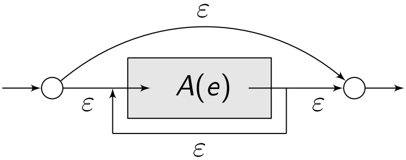
syntaxe		sémantique
aut. finis dét. complets		langages reconnaissables
$\not\supseteq\cap$		$\parallel$ ✓
aut. finis déterministes		langages reconnaissables
$\not\supseteq\cap$	$L(\cdot)$	$\parallel$?
automates finis	$\longrightarrow$	langages reconnaissables
$\not\supseteq\cap$		$\parallel$ ✓
aut. finis à trans. spontanées		langages reconnaissables
		$\parallel$ $\Uparrow$
expressions rationnelles		langages rationnelles

Dernièrement : Algorithme de Thompson

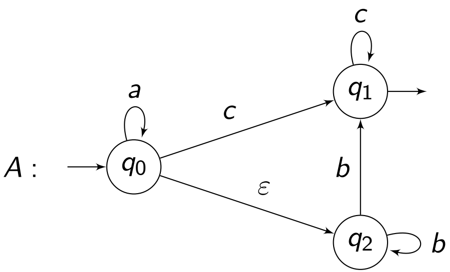
- pour traduire une expression rationnelle e en automate fini $A(e)$, inductivement
- $\emptyset \mapsto$  ; $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mapsto$ 

- $e_1 e_2 \mapsto$ 

- $e_1 + e_2 \mapsto$ 

- $e^* \mapsto$ 

5 minutes de réflexion

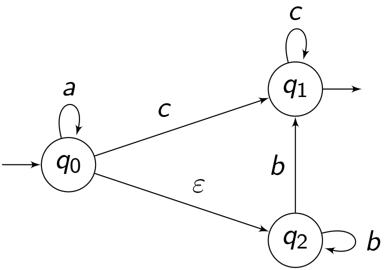


Vrai ou faux ?

1. $acc \in L(A)$
2. $acb \in L(A)$
3. $abc \in L(A)$
4. $abb \in L(A)$
5. $L(b^* bc^*) \subseteq L(A)$

5 minutes de réflexion

A :



Vrai ou faux ?

1. $acc \in L(A)$ ✓
2. $acb \in L(A)$ ✗
3. $abc \in L(A)$ ✓
4. $abb \in L(A)$ ✓
5. $L(b^* bc^*) \subseteq L(A)$ ✓

Déterminisation

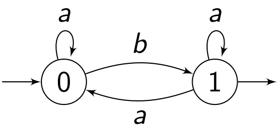
Automate des parties

Définition

Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini. L'automate des parties de A est l'automate fini déterministe complet $A' = (\Sigma, Q', q'_0, F', \delta')$ définit comme suite :

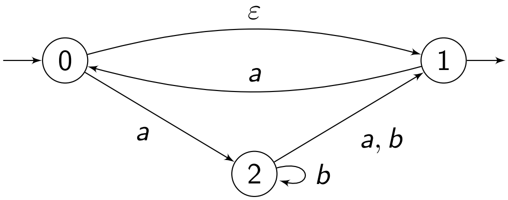
- $Q' = \mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q,
- $q'_0 = Q_0$,
- $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$, et
- $\delta'(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P : (p, a, q) \in \delta\}$.

Exemple (sur tableau)



Exemple (sur tableau)

- et ça marche aussi avec transitions spontanées :



Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.
5. On a $q_i \in Q_i$ pour tout i, donc $q_n \in Q_n \cap F$, c.à.d. $Q_n \in F'$, alors σ' est un calcul réussi, donc $w \in L(A')$.

Le non-déterminisme ne paye pas

Théorème

Pour tout automate fini A il existe un automate fini déterministe complet A' tel que $L(A') = L(A)$.

Démonstration.

1. Notons $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$.
2. Soit A' l'automate des parties de A, on montre que $L(A') = L(A)$.
3. Soit $w \in L(A)$, alors il existe un calcul réussi $\sigma = q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} q_n$ dans A t.q. $\lambda(\sigma) = w$.
4. Soit $Q_1 = \delta'(Q_0, a_1)$, $Q_2 = \delta'(Q_1, a_2)$ etc., alors $\sigma' = Q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_n} Q_n$ est un calcul dans A' t.q. $\lambda(\sigma') = w$.
5. On a $q_i \in Q_i$ pour tout i, donc $q_n \in Q_n \cap F$, c.à.d. $Q_n \in F'$, alors σ' est un calcul réussi, donc $w \in L(A')$.

Et l'autre direction ?

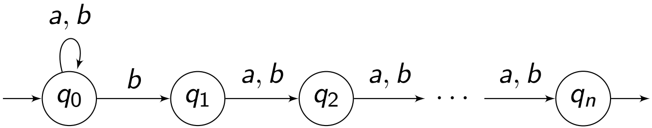
Le non-déterminisme paye

$$\begin{tikzcd}
 & \text{aut. finis déterministes} \arrow[dl] & \\
\text{aut. finis dét. complets} \arrow[dr] & & \text{automates finis} \arrow[ul] \\
 & \text{aut. finis à trans. spontanées} \arrow[ur] & \\
 & \text{expressions rationnelles} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

- difficile d'inventer un traduction directe des expressions rationnelles en automates finis déterministes
- le non-déterminisme est utile pour des spécifications partielles
- des automates finis non-déterministes peuvent être exponentiellement plus distinctes que des automates finis déterministes :

Exercice

Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :

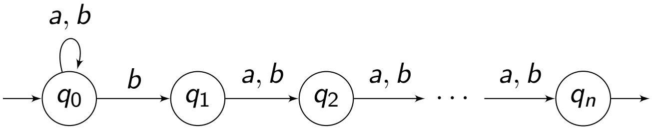


1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

Exercice

Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



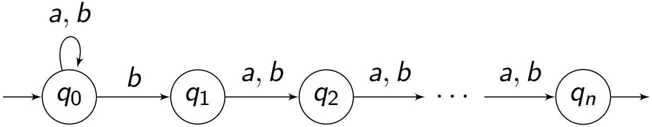
1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

   $(a+b)^* b (a+b)^{n-1}$

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

Exercice

Pour $n \geq 2$ soit A_n l'automate fini comme suit :



1. Trouver une expression rationnelle e_n telle que $L(e_n) = L(A_n)$.

   $(a+b)^* b (a+b)^{n-1}$

2. Quelle est le nombre d'états le plus petit d'un automate fini déterministe A'_n tel que $L(A'_n) = L(A_n)$?

   2^n

Langages non-rationnels

Motifs répétitifs

- Existent-ils des langages non-rationnels ?
- Le langage $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est-il rationnel ?
- Le langage des expressions arithmétiques est-il rationnel ?

Lemme de l'étoile

1. Soit $A = (\Sigma, Q, Q_0, F, \delta)$ un automate fini avec k états.
2. Soit $x \in L(A)$ un mot de longueur $|x| = k$ (si il existe) ; écrivons $x = a_1 \dots a_k$.
3. Alors on a un calcul réussi $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} s_{k+1}$ dans A.
4. Ce calcul utilise $k+1$ états, alors un état de A a été utilisé deux fois. (Principe des tiroirs.)
5. Soient donc $i < j$ tel que $s_i = s_j$: la chaîne $s_i \rightsquigarrow s_j$ est une boucle.
6. Alors $s_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{i-1}} s_i \xrightarrow{a_j} s_{j+1} \to \cdots \to s_{k+1}$ est aussi un calcul réussi, avec étiquette $a_1 \dots a_{i-1} a_j \dots a_k$.
7. En écrivant $u = a_1 \dots a_{i-1}$, $v = a_i \dots a_{j-1}$ et $w = a_j \dots a_k$ on trouve que $L(uv^*w) \subseteq L(A)$.

Lemme de l'étoile

Théorème (4.25)

Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec longueur $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^*w) \subseteq L$.

- aussi lemme de pompage
- note $\exists k : \forall x : \exists u, v, w$
- démonstration par quelques petites modifications de l'argument précédent

Corollaire

Théorème (rappel)

Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec longueur $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^*w) \subseteq L$.

Corollaire

Le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas rationnel.

Démonstration.

1. Supposons par l'absurde que L soit rationnel.
2. Soit k comme fourni par la lemme d'étoile.
3. Soit $x = a^k b^k$, alors $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$ et $|v| \geq 1$.
4. Donc $u = a^i$, $v = a^j$ et $w = a^{k-i-j} b^k$ pour un $j \geq 1$.
5. On a $uw \in L(uv^*w)$ mais $uw \notin L$, contradiction !

Exercice

Théorème (rappel)

Soit L un langage rationnel. Il existe $k \geq 0$ tel que tout $x \in L$ avec longueur $|x| \geq k$ peut s'écrire $x = uvw$ avec $|uv| \leq k$, $|v| \geq 1$ et $L(uv^*w) \subseteq L$.

Montrer que le langage $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ n'est pas rationnel.

Les automates finis sont décidables

Théorème (4.27)

Il existe un algorithme qui, pour A un automate fini, décide si $L(A)$ est vide, fini ou infini.

Démonstration.

Soit k le nombre d'états de A.

1. $L(A)$ est non-vide ssi il existe $w \in L(A)$ avec longueur $|w| < k$.
2. $L(A)$ est infini ssi il existe $w \in L(A)$ avec $k \leq |w| < 2k$.

(le reste sur tableau)


That's all Folks!